Formelsammlung

Mathematik

Sekundarstufe II

--- Grundlagen & Analysis ---

max ERNST GESAMTSCHULE KÖLN

Inhaltsverzeichnis

Zahlbereiche & Intervalle

Natürliche Zahlen	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}=\{0;1;2;3;...\}$	
Ganze Zahlen	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}=\{0;\pm 1;\pm 2;\pm 3;...\}$	
Rationale Zahlen	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{Q}=\left\{\frac{p}{q} \mid p,q\in\mathbb{Z};q\neq 0\right\}$	Menge aller Bruchzahlen (entspricht den endlichen und den periodischen Dezimalzahlen)
Reelle Zahlen	$\mathbb{R}$	Menge aller rationalen Zahlen ($\mathbb{Q}$) und aller irrationalen Zahlen (unendliche nichtperiodische Zahlen; Bsp: $\sqrt{2};\pi$)	
Geschlossenes Intervall	[a; b] = {x|a ≤ x ≤ b}	alle reellen Zahlen von a bis b einschließlich der Grenzen a und b	
Offenes Intervall	]a; b[= {x|a < x < b}	wie oben, jedoch ohne a und b	

Termumformungen

Kommutativgesetz	a+b=b+a a·b=b·a	Summanden oder Faktoren können vertauscht werden.
Assoziativgesetz	a+(b+c)=(a+b)+c a·(b·c) = (a·b)·c	Summanden oder Faktoren können beliebig zusammengefasst werden.
Distributivgesetz	a·(b+c)=ab+ac	Ausmultiplizieren bzw. Ausklammern
Klammern auflösen	+(a+b−c) = a+b −c − (a+b −c) = −a−b+c	Ein Minus vor der Klammer vertauscht beim Auflösen der Klammer alle Vorzeichen
Multiplikation von Summen (erweitertes Distributivgesetz)	(a+b)·(c+d) = ac+ad+bc+bd	Jeder Summand der ersten Klammer wird mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert.
Binomische Formeln	1.: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 2.: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ 3.: $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$	Bedeutung „Binom“: Summe oder Differenz aus zwei Gliedern (hier a und b)

Bruchrechnung

Kehrwert (Reziprokes)	$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1$	Der Kehrwert eines Bruchs entsteht durch Vertauschung von Zähler und Nenner
Erweitern / Kürzen	$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot c}{b\cdot c}$	Zähler und Nenner mit einer Zahl c multiplizieren / dividieren verändert nicht den Wert des Bruchs
Addition (Subtraktion analog)	$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$	Gleicher Nenner (gleichnamig): Zähler werden addiert, Nenner bleibt erhalten Ungleichnamig: Zuerst gleichnamig machen, dann Zähler addieren
Multiplikation	$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$	Zähler und Nenner werden separat mulitpliziert
Division	$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$	Dividend mit Kehrwert des Divisors multiplizieren

Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Potenzgesetze		
Multiplikation	$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$	Potenzen gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert
Division	$x^a : x^b = \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$	Potenzen gleicher Basis werden dividiert, indem man die Exponenten subtrahiert
Potenzieren	$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$	Potenzen werden potenziert, indem man die Exponenten multipliziert
Negative Exponenten	$x^{-a} = \left(\frac{1}{x}\right)^a = \frac{1}{x^a}$	Das Reziproke der Basis erhält bei Vorzeichenwechsel des Exponenten den Wert der ursprünglichen Potenz
Gleiche Exponenten	$x^a \cdot y^a = (xy)^a$ $x^a + y^a \neq (x+y)^a \quad ; a \neq 1$!!!	Faktoren aus Potenzen mit gleichem Exponenten können multiplikativ zusammengefasst werden **Vorsicht:** Summen/Differenzen lassen sich so nicht vereinfachen !
Wurzelgesetze		
Zusammenhang von Potenz und Wurzel	$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \quad ; \quad x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$	Bei rationalen Exponenten gibt der Nenner den Exponent der Wurzel an, der Zähler den Exponent des Radikanden
Wurzeln multiplizieren /dividieren	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ $\sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b} \neq \sqrt[n]{a \pm b} \quad ; n \neq 1$!!!	Wurzeln mit gleichem Exponenten werden mulitpliziert/dividiert, indem man die Radikanden multipliziert/ dividiert. **Vorsicht:** Summen/Differenzen lassen sich so nicht vereinfachen !
Wurzeln wurzeln ;)	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	Wurzeln werden aus Wurzeln gezogen, indem man die Exponenten multipliziert, den Radikanden beibehält
Logarithmengesetze		
Logarithmus	$x = \log_a b \Leftrightarrow a^x = b \quad (a \in \mathbb{R} > 0)$ $\log_{10} a = \lg a$ $\log_e a = \ln a \quad (e = \text{Eulersche Zahl})$	Der Logarithmus x von b zur Basis a ist die Zahl, mit der a potenziert werden muss, um b zu erhalten. → dekadischer Logarithmus → natürlicher Logarithmus
Addition /Subtraktion	$\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$ $\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\frac{b}{c}\right)$	Logarithmen gleicher Basis werden addiert/subtrahiert, indem man die Numeri (b,c) multipliziert/dividiert
Logarithmus einer Potenz	$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$	Exponent n als Faktor vor den Logarithmus der Basis setzen
Logarithmus einer Wurzel	$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$	Kehrwert des Wurzelexponenten als Faktor vor den Logarithmus des Radikanden setzen

Prozent – und Zinsrechnung

	Prozentrechnung	Zinsrechnung
Grundgleichung	$\frac{W}{G} = p\ \%$	$\frac{Z}{K} = p\ \%$
Begriffe	W → Prozentwert G → Grundwert p % → Prozentsatz	Z → Zinsen K → Kapital p % → Zinssatz

Proportionalität

Direkte Proportionalität	Dem n-fachen einer Größe a wird immer das n-fache der Größe b zugeordnet. Schreibweise: $a \sim b$	Alle Paare (a;b) sind quotientengleich: $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \ldots = k$
Umgekehrte (indirekte) Proportionalität	Dem n-fachen einer Größe a wird immer das (1/n)-fache einer Größe b zugeordnet. Schreibweise: $a \sim \frac{1}{b}$	Alle Paare (a;b) sind produktgleich: $b_1 \cdot a_1 = b_2 \cdot a_2 = \ldots = k \quad ; k\ \text{ist konstant}$

Lineare Gleichungen & Funktionen

Lineare Gleichung	$ax+b=0$	Lösungsmenge: $L = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$
Lineare Funktion	$y = ax+b \quad (a, b \in \mathbb{R}; a \neq 0)$	Spezialfall: Für a=0 spricht man von **konstanten Funktionen** (Graphen sind parallel zur x-Achse)
Schnittstellen mit den Achsen	Der Punkt $\left(-\frac{b}{a}; 0 \right)$ ist der Schnittpunkt der Geraden mit der x-Achse.	Der Punkt $(0;b)$ ist der Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse.
Steigung	Für zwei beliebige Punkte $(x_1 \mid y_1)$, $(x_2 \mid y_2)$ der Geraden gilt: $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	Der Parameter a gibt die Steigung der Geraden an. Steigung ist das Verhältnis der Differenz der y-Werte zur Differenz der x-Werte zweier beliebiger Punkte der Geraden.
Steigungswinkel	$a = \tan(\alpha) \quad ; \quad \alpha = \tan^{-1}(a)$	α gibt den Winkel zwischen der Geraden und der x-Achse an

Quadratische Gleichungen & Funktionen

Quadratische Gleichung	Allgemeine Form: $ax^2+bx+c=0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$	Normalform: $x^2+px+q=0 \quad \left(p = \frac{b}{a}; q = \frac{c}{a} \right)$
Quadratische Funktion	$f(x) = ax^2+bx+c$	Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine Parabel. Der Fall a=1;b=c=0 heißt **Normalparabel**
y-Achsenabschnitt	Der Punkt (0;f(0))=(0;c) ist Schnittpunkt von Parabel und y-Achse	

Lösungsformel **(„p-q-Formel")**	$x_{1;2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$	x_1 und x_2 sind Lösungen der quadratischen Gleichung $x^2+px+q=0$
Diskriminante	$D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q$	Die Diskriminante ist der Radikand der Lösungsformel
Anzahl der Nullstellen über Diskriminante	$D>0 \rightarrow L=\{x_1; x_2\}$ $D=0 \rightarrow L=\{x_1\}=\{x_2\}$ $D<0 \rightarrow L=\{\ \}=\emptyset$	- zwei verschiedene Lösungen - genau eine Lösung - keine Lösung
Scheitelpunktform	$f(x)=a(x+d)^2+e$ $\Rightarrow S(-d;e)$	Der Scheitelpunkt S ist der höchste bzw tiefste Punkt der Parabel. Die Parabel ist symmetrisch zur Geraden $x=-d$ (Parallele zur y-Achse)
Biquadratische Gleichungen	Eine Gleichung der Form $x^4+px^2+q=0$ kann mittels der **Substitution** (Ersetzung) $x^2=z$ in eine quadratische Gleichung $z^2+pz+q=0$ umgeformt werden. Sind dann z_1 und z_2 nichtnegative Lösungen, so sind $x_{1;2}=\pm\sqrt{z_1}$ und $x_{3;4}=\pm\sqrt{z_2}$ Lösungen der ursprünglichen Gleichung.	

Funktionen – Definition & allgemeine Begriffe

Eine Funktion ist eine Abbildung f, die jedem Element x einer Menge D_f **genau** ein Element y einer Menge W_f zuordnet.

Definitionsbereich	D_f → Menge der x-Werte	x heißt **Argument** (*bei physikalischen Aufgaben wird oft die Variable t statt x verwendet; t steht für Zeit (time))*
Wertebereich	W_f → Menge der y-Werte	y heißt **Funktionswert**
Funktion	$y=f(x)$ oder: $x \rightarrow f(x)$	
Graph einer Funktion	Menge aller Punkte P(x; f(x)) mit $x\in D_f$; Bezeichnung: G_f	
Nullstelle	Alle $x_N\in D$ mit $f(x_N)=0$	Nullstellen sind die Schnittstellen des Funktionsgraphen mit der x-Achse
Umkehrfunktion f^{-1}	Abbildung, die jedem Element $f(x)\in W_f$ eindeutig das Ausgangselement $x\in D$ zurodnet. Der Graph von f^{-1} entsteht durch Spiegelung des Graphen von f an der Geraden $y=x$. Der Funktionsterm wird durch Vertauschen der Variablen x und y in der Gleichung $y=f(x)$ ermittelt.	

Monotonie	Gilt für alle x_1 ,x_2 aus einem Intervall [a,b] aus D_f ,wobei $x_1<x_2$:			
	$f(x_1)\geq f(x_2)$, so fällt G_f monoton	$f(x_1)>f(x_2)$, so fällt G_f streng monoton	$f(x_1)<f(x_2)$, so wächst G_f streng monoton	$f(x_1)<f(x_2)$, so wächst G_f monoton

Symmetrie	Der Graph einer geraden Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Für alle $x\in D_f$ gilt: $f(x)=f(-x)$	Der Graph einer ungeraden Funktion ist punktsymmetrisch zum Urspung (0;0). Für alle $x\in D_f$ gilt: $-f(x)=f(-x)$
Periodizität	Existiert ein $h>0$, so dass für jedes $x\in D_f$ auch $x+h\in D_f$ und des Weiteren $f(x)=f(x+h)$ gilt, so heißt f periodisch. Die kleinste Zahl h mit dieser Eigenschaft heißt **Periode von f.**	

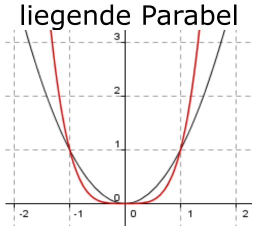
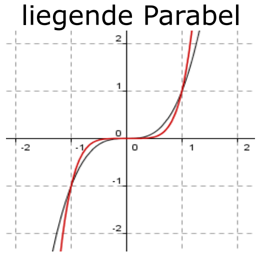
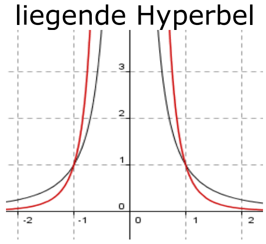
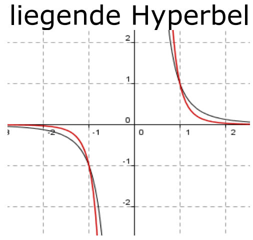
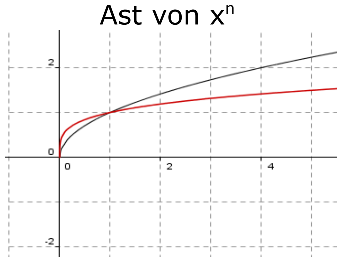
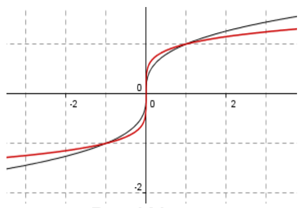
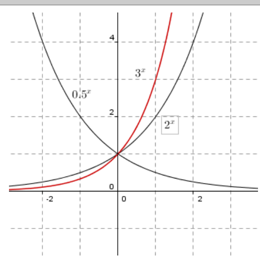
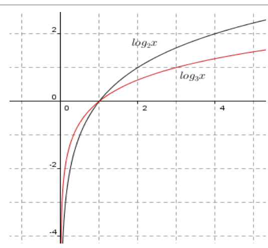
Transformation von Funktionen

Gilt für zwei Funktionen f und g mit gemeinsamem Definitionsbereich D für alle $x \in D$ eine der folgenden Gleichungen, so ist der Graph von g (G_g) gegenüber dem Graphen von f (G_f) auf eindeutige Weise transformiert.		
Spiegelung	$g(x) = -f(x)$	G_g entsteht durch Spiegelung von G_f an der x-Achse
	$g(x) = f(-x)$	G_g entsteht durch Spiegelung von G_f an der y-Achse
	$g(x) = -f(-x)$	G_g entsteht durch Spiegelung von G_f am Ursprung
Verschiebung	$g(x) = f(x) + c \quad (c \in \mathbb{R})$	G_g entsteht durch Verschiebung von G_f um c Einheiten in y-Richtung
	$g(x) = f(x + c) \quad (c \in \mathbb{R})$	G_g entsteht durch Verschiebung von G_f um c Einheiten in x-Richtung nach links (c>0) bzw nach rechts (c<0)
Streckung /Stauchung	$g(x) = a \cdot f(x) \quad (a \in \mathbb{R} > 0)$	G_g ist gegenüber G_f um Faktor a: gestreckt (steiler), falls a>1; gestaucht (flacher), falls 0<a<1

Lineare Gleichungssysteme (LGS) mit 2 Gleichungen und 2 Variablen

Form	(I) $a_1 x + b_1 y = c_1$ (II) $a_2 x + b_2 y = c_2$	Das LGS besteht aus zwei linearen Gleichungen mit beliebigen, aber konstanten Koeffizienten $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$
Lösung des LGS	Ein Paar (x;y), das beide Gleichungen erfüllt, ist eine Lösung des LGS	
Mögliche Lösungen	1. genau eine Lösung: $L = \{(x_S; y_S)\}$	Der Punkt $(x_S; y_S)$ ist der Schnittpunkt der Geraden zu (I) und (II)
	2. keine Lösung: $L = \{\varnothing\}$	Die beiden Geraden sind echt parallel zueinander, schneiden sich also nicht.
	3. unendlich viele Lösungen: $L = \{(x; y)\} \text{ mit } y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$	Die beiden Geraden sind identisch.
Lösungsverfahren		
Einsetzungsverfahren	Eine Gleichung wird nach einer Variablen 1 aufgelöst, der Term für diese Variable in die andere Gleichung anstelle der Variablen eingesetzt und diese Gleichung dann gelöst. Abschließend mit dieser Lösung die fehlende Variable 1 bestimmen.	
Gleichsetzungs-verfahren	Beide Gleichungen nach einer Variable 1 auflösen, Terme für diese Variable gleichsetzen und nach Variable 2 auflösen. Mit dieser Lösung abschließend Variable 1 bestimmen.	
Additionsverfahren	Beide Gleichungen durch Multiplikation/Division so umformen, dass entweder $a_1 = -a_2$ oder $b_1 = -b_2$ gilt, dann die Gleichungen addieren, so dass eine Gleichung mit einer Variablen entsteht. Diese lösen, mit der Lösung dann die fehlende Variable bestimmen.	

Grundfunktionen

Potenzfunktion: $f(x)=x^n$; $(n\in\mathbb{Z})$	n gerade	n ungerade
n positiv	G_f ist symmetrisch zur y-Achse liegende Parabel  $D_f=\mathbb{R}; W_f=\mathbb{R}\geqslant 0$	G_f ist symmetrisch zum Ursprung liegende Parabel  $D_f=\mathbb{R}; W_f=\mathbb{R}$
n negativ	G_f ist symmetrisch zur y-Achse liegende Hyperbel  $D_f=\mathbb{R}\neq 0; W_f=\mathbb{R}\geqslant 0$	G_f ist symmetrisch zum Ursprung liegende Hyperbel  $D_f=\mathbb{R}\neq 0; W_f=\mathbb{R}$
Wurzelfunktion: $f(x)=x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$ $(n\in\mathbb{N})$	ist Umkehrfunktion zum positiven Ast von x^n  $D_f=\mathbb{R}\geqslant 0; W_f=\mathbb{R}\geqslant 0$	ist Umkehrfunktion zu x^n  $D_f=W_f=\mathbb{R}$
Exponentialfunktion $f(x)=a^x; (a\in\mathbb{R}>0)$	○ $D_f=\mathbb{R}; W_f=\mathbb{R}>0$ ○ keine Nullstelle; ○ gemeinsamer Punkt (0;1) ○ 0<a<1: streng monoton fallend; ○ a>1: streng monoton wachsend ○ $f^{-1}(x)=\log_a x$	
Logarithmusfunktion $f(x)=\log_a x; (a\in\mathbb{R}>0)$	○ $D_f=\mathbb{R}>0; W_f=\mathbb{R}$ ○ Nullstelle (1;0) ○ 0<a<1: streng monoton fallend; ○ a>1: streng monoton wachsend ○ $f^{-1}(x)=a^x$	

ANALYSIS

Rationale Funktionen

Ganzrationale oder Polynomfunktion	Eine ganzrationale Funktion ist eine Funktion des Typs $f(x)=a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0; (a_n \neq 0; a_i \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N})$ Die Faktoren a_i heißen **Koeffizienten** von f. n gibt den **Grad** der Funktion an [grad(f)=n].	
Symmetrie	f achsensymmetrisch zur y-Achse genau dann, wenn gilt: $f(x)=f(-x)$ f punktsymmetrisch zum Ursprung genau dann, wenn gilt: $-f(x)=f(-x)$	Merkregel: Kommen bei einer Polynomfunktion ausschließlich **gerade** Exponenten vor (a_0 beliebig), so ist f achsen-symmetrisch; kommen ausschließlich **ungerade** Exponenten vor (und a_0=0!), so ist f punktsymmetrisch.
Nullstellen	Eine ganzrationale Funktion vom Grad n hat *höchstens* n Nullstellen.	
Extrempunkte (Hoch-& Tiefpunkte)	Eine ganzrationale Funktion vom Grad n hat *höchstens* n-1 Extrempunkte. Zwischen zwei Nullstellen befindet sich mindestens ein Extrempunkt.	

Differenzialrechnung

Mittlere Änderungsrate (Differenzenquotient)	$m=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$	Der Differenzenquotient gibt die **mittlere** bzw. **durchschnittliche Steigung der Sekante** durch die Punkte (x;f(x)) und (x_0;f(x_0)) an.
Ableitung Momentane / lokale Änderungsrate (Differenzialquotient)	$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ $=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	Die Ableitung ist der Differenzialquotient (=Grenzwert des Differenzenquotienten) für $x \to x_0$ und gibt die **Steigung der Tangente** im Punkt (x_0;f(x_0)) an.
Differenzierbarkeit	Existiert der obige Grenzwert, d.h. existiert $f'(x_0)$, so heißt f differenzierbar an der Stelle x_0. Ist f für alle $x \in D_f$ differenzierbar, so heißt f differenzierbare Funktion.	
Ableitungsfunktion	Die Funktion f´, die jedem $x \in D_f$ die Ableitung f´(x) zuordnet, heißt Ableitungsfunktion von f.	

Einige wichtige Ableitungsfunktionen

f(x)=	→ f´(x)=	f(x)=	→ f´(x)=	f(x)=	→ f´(x)=
x	1	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$	$a^x \quad (a>0)$	$a^x \cdot \ln a$	$\sin x$	$\cos x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	e^x	e^x	$\cos x$	$-\sin x$

Ableitungsregeln für differenzierbare Funktionen

Regel	Funktion	Ableitungsfunktion	
Konstantenregel	$f(x)=c \; ; \; c\in\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	Konstante Funktionen (waagerechte Geraden) besitzen die Steigung Null.
Faktorregel	$f(x)=c\cdot g(x)$	$f'(x)=c\cdot g'(x)$	Koeffizienten werden in die Ableitungsfunktion übertragen.
Summenregel	$f(x)=g(x)+h(x)$	$f`(x)=g'(x)+h'(x)$	Summanden werden einzeln abgeleitet.
Produktregel	$f(x)=g(x)\cdot h(x)$	$f` = g'\cdot h + g\cdot h'$	
Quotientenregel	$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$	$f' = \frac{g'\cdot h - g\cdot h'}{h^2}$	Wichtig: Erst den Zählerterm ableiten!!
Kettenregel	$f(x)=g(i(x))$	$f'(x)=g'[i(x)]\cdot i'(x)$	g ist die äußere, i die innere Funktion

Untersuchung von Funktionen mittels der Ableitungsfunktionen

Begriff	Bedingung / Kriterium		Aussage
Monotonie	$f'(x)>0$ für alle $x\in[a;b]$ $f'(x)<0$ für alle $x\in[a;b]$		Die Funktion f ist in [a;b] streng monoton wachsend. Die Funktion f ist in [a;b] streng monoton fallend.
Krümmung	$f''((x)>0$ für alle $x\in[a;b]$ $f''((x)<0$ für alle $x\in[a;b]$		Graph von f ist linksgekrümmt in [a;b] (konvex) Graph von f ist rechtsgekrümmt in [a;b] (konkav)
Hochpunkt (Maximalstelle; Maximum)	Notwendig: Hinreichend:	$f'(x_H)=0$ zusätzlich $f''((x_H)<0$	Der Punkt $(x_H\,;\,f(x_H))$ ist ein **lokaler** Hochpunkt. x_H heißt lok. Maximalstelle, $f(x_H)$ lok. Maximum
Tiefpunkt (Minimalstelle; Minimum)	Notwendig: Hinreichend:	$f'(x_T)=0$ zusätzlich $f''((x_T)>0$	Der Punkt $(x_H\,;\,f(x_H))$ ist ein **lokaler** Tiefpunkt. x_H heißt lok. Minimalstelle, $f(x_H)$ lok. Minimum
L-R-Wendepunkt (Wendestelle)	Notwendig: Hinreichend:	$f''((x_W)=0$ zusätzlich $f'''(x_W) < 0$	Der Punkt $(x_W\,;\,f(x_W))$ ist ein Links-Rechts-Wendepunkt von f, d.h. Wendestelle mit maximalem Anstieg oder minimalem Gefälle. x_W heißt Wendestelle.
R-L-Wendepunkt (Wendestelle)	Notwendig: Hinreichend:	$f''((x_W)=0$ zusätzlich $f'''(x_W) > 0$	Der Punkt $(x_W\,;\,f(x_W))$ ist ein Rechts-Links-Wendepunkt von f, d.h. Wendestelle mit maximalem Gefälle oder minimalem Anstieg. x_W heißt Wendestelle.
Sattelpunkt	Notwendig: Hinreichend:	$f'(x_S)=0$ und $f''(x_S)=0$ zusätzlich $f'''(x_S) \neq 0$	Der Punkt $(x_S\,;\,f(x_S))$ ist ein Sattelpunkt von f. Ein Sattelpunkt ist ein Wendepunkt mit Steigung Null. (Horizontalwendepunkt)

Vorzeichenwechsel-kriterium für Extrema *(es gilt $f'(x_E)=0$)*	$f'(x)$ wechselt beim Durchgang durch x_H mit wachsendem x das Vorzeichen **von plus zu minus.**	x_H ist lokale Maximalstelle.
	$f'(x)$ wechselt beim Durchgang durch x_T mit wachsendem x das Vorzeichen **von minus zu plus.**	x_T ist lokale Maximalstelle.
Vorzeichenwechsel-kriterium für Wendestellen *(es gilt $f''(x_W)=0$)*	$f''(x)$ wechselt beim Durchgang durch x_W mit wachsendem x das Vorzeichen **von plus zu minus.**	X_W ist Links-Rechts-Wendepunkt
	$f''(x)$ wechselt beim Durchgang durch x_W mit wachsendem x das Vorzeichen **von minus zu plus.**	X_W ist Rechts-Links-Wendepunkt

Anwendungen der Differenzialrechnung

Tangente und Normale an G_f im Punkt (a ; f(a))	Tangentensteigung: $m_T = f'(a)$ Tangentengleichung: $y=m_T(x-a)+f(a)$ Steigungswinkel: $\tan(\alpha)=f'(a)$	Normalensteigung: $m_N = -\frac{1}{f'(a)}$ Normalengleichung: $y=m_N(x-a)+f(a)$ *(Die Normale ist die Senkrechte zur Tangente im Punkt (a ; f(a)))*
Extremwert-probleme	Zielsetzung: Eine bestimmte Größe soll maximiert oder minimiert werden. Dazu muss diese Größe als Funktion modelliert werden, um sie mit den Methoden der Differenzialrechnung auf Extrema zu untersuchen. Methode: 1. Aufstellen einer **Zielfunktion z,** die die Größe beschreibt. 2. Hängt z von mehr als einer Variablen ab, müssen N**ebenbedingungen** gesucht und umgeformt werden, um alle bis auf eine Variable zu eliminieren. 3. Sinnvollen Definitionsbereich für z festlegen. 4. Relative und absolute Extrema von z im Definitionsbereich bestimmen. (Randwerte untersuchen!) 5. Ergebnisse interpretieren.	
Modellierung von Funktionen („Steckbrief-aufgaben“)	Zielsetzung: Suche Funktion f, die einen bestimmten Sachverhalt möglichst gut beschreibt, um z.B. weitere Prognosen machen zu können. Methode: 1. Auswahl einer **geeigneten Funktionsart** (falls nicht vorgegeben): ganzrational vom Grad n; exponentiell, etc. 2. Formulieren der Bedingungen für Funktionswerte, Steigungen, Krümmungen, Extrema etc. mithilfe der allgemeinen Funktionsgleichung und deren Ableitungsfunktionen. 3. Lösen des Linearen Gleichungssystems (oder der Koeffizientenmatrix) der formulierten Bedingungsgleichungen. 4. Die Lösungens des LGS sind die Koeffizienten der gesuchten Funktion.	
Approxiamtion von Nullstellen *(Newtonsches Tangentennäherungs verfahren)*	Aus einem (hinreichend guten) Näherungswert x_1 für die gesuchte Nullstelle x_0 bestimmt man einen genaueren Näherungswert x_2 mit $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$; Das Verfahren wird unter Verwendung von x_2 fortgesetzt. **Bedingung**: $f'(x_i) \neq 0$, sowie $\frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} < 1$	

Grenzwerte

Existiert ein Grenzwert G, so sagen wir, die Funktion ***konvergiert****.* *Wird f(x) aber unendlich groß (positiv oder negativ), so* ***divergiert*** *die Funktion.*	
Definition & Schreibweise für $x \to \pm\infty$	Eine Zahl G heißt **Grenzwert** einer Funktion f für $x \to \infty$, wenn es zu jeder positiven Zahl ε eine Stelle x_1 gibt, sodass für alle $x>x_1$ gilt: $\lvert f(x) - G \rvert < \varepsilon$. *Anders gesagt: Der Abstand der Funktionswerte vom Grenzwert G wird beliebig gering, die Funktion nähert sich G immer weiter an.*
Definition & Schreibweise für $x \to x_0$	Eine Zahl G heißt Grenzwert einer Funktion f für $x \to x_0$, wenn es zu jeder positiven Zahl ε eine Zahl δ>0 gibt, sodass für alle $x \in [x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ gilt: $\lvert f(x) - G \rvert < \varepsilon$. *Anders gesagt: Die Funktion nähert sich dem Punkt (x_0 ; G) von links und rechts beliebig nahe an. Unterscheiden sich Links- und Rechtslimes voneinander, divergiert die Funktion für* $x \to x_0$
Schreibweisen	$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = G$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = G$; $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = G$ lim steht für „limes“: Grenze, Grenzwert
Grenzwertsätze	$\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$ $\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$; $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$
Asymptoten *gebrochenrationaler Funktionen*	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$; Abhängig von grad(u) und grad(v) nähert sich der Graph von f für $x \to \pm\infty$ einer Geraden, der Asymptote an. grad(u) < grad(v): Asymptote y=0 (x-Achse!) grad(u) = grad(v)=n: Asymptote $y = \frac{a_n}{b_n}$; (a_n;b_n: Leitkoeffizienten von u bzw v) grad(u) = grad(v)+1: Schiefe Asymptote (Term mittels Polynomdivision!)
Gebrochenrationale Funktion	$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$; u,v ganzrational, grad(v)>0 Die Nullstellen von u(x) sind die Nullstellen von f(x). $N_f = N_u$ Die Nullstellen von v(x) sind die **Definitionslücken** von f(x), f ist also an diesen Stellen nicht definiert: $D_f = \mathbb{R} \setminus N_v$ Diese Stellen heißen **Polstellen.** Gilt $u(x_N)=v(x_N)=0$ für eine Nullstelle x_N, so spricht man von einer **hebbaren Definitionslücke** bei x_N. Kürzt man $(x-x_N)$ aus Zähler- und Nennerterm, so entsteht eine Funtion $f_1(x)$, die f entspricht und zusätzlich für x_N definiert ist.
Regel von l´Hospital *zur Ermittlung von unbestimmten Grenzwerten*	Ist $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$ bzw. $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, so spricht man von unbestimmten Ausdrücken, da diese nicht definiert sind. Sind aber f und g in [b;c] mit $a \in [b;c]$ differenzierbar und existiert $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so gilt: $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Die Regel lässt sich wiederholen, sollte auch dieser Grenzwert nicht existieren.

Integralrechnung

Grundbegriffe	Zusammenhänge
Idee des Integrals	*Gesucht ist die „Fläche", die auf einem Intervall [a;b] zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x-Achse entsteht. Je nach Kontext muss diese „Fläche" als Flächeninhalt, Wirkung oder Bestand einer Größe interpretiert werden.*
Produktsummen *(Ober- und Untersumme)*	Näherungsweise Bestimmung der „Fläche" durch Zerlegung des Intervalls [a; b] in n Teilintervalle der Länge $\Delta x = \frac{b-a}{n}$; Obersumme: $O_n = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x$; Untersumme: $U_n = \sum_{i=1}^{n} f(\underline{x}_i) \cdot \Delta x$, mit $f(\bar{x}_i)$ (bzw. $f(\underline{x}_i)$) ist größter (bzw. kleinster) Funktionswert im i-ten Teilintervall. Je größer n, desto genauer ist die Approximation der „Fläche"
Bestimmtes Integral	Wenn die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} O_n$ und $\lim_{n\to\infty} U_n$ existieren und übereinstimmen, so wird dieser Grenzwert als bestimmtes Intergral der Funktion f über dem Intervall [a; b] bezeichnet. Schreibweise: $\int_a^b f(x)\,dx$ — **f(x) – Integrand** **x – Integrationsvariable** **a, b – Integrationsgrenzen**
Eigenschaften des bestimmten Integrals	
Bezüglich der Integrationsgrenzen	$\int_a^a f(x)\,dx = 0$; $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$; $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$ (für $b \in [a;c]$)
Linearität	$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$; $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$
Monotonie	Gilt f(x)<g(x) für alle $x \in [a;b]$, so folgt: $\int_a^b f(x)\,dx < \int_a^b g(x)\,dx$
Mittelwertsatz der Integralrechnung	Ist f stetig im Intervall [a; b], so gibt es mindestens eine Zahl c mit a<c<b, so dass gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b-a)$. $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$ heißt **Integralmittelwert** von f über [a; b]
Stammfunktion und der Zusammenhang mit dem bestimmtem Integral	
Stammfunktion	Eine Funktion F ist eine **Stammfunktion** der Funktion f , wenn für alle x aus dem gemeinsamen Definitionsbereich von f und F gilt: F´(x) = f(x) Mit F(x) ist auch jede Funktion F(x)+C eine Stammfunktion von f.
Unbestimmtes Integral	Die Menge aller Stammfunktionen von f heißt **unbestimmtes Integral** von f. Schreibweise: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ — **C – Integrationskonstante**
Integralfunktion	$F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ heißt **Integralfunktion** von f zur Untergrenze a. - Ist f stetig auf einem Intervall *I* mit $a \in I$, so ist F_a eine Stammfunktion von f und besitzt an der Stelle x=a eine Nullstelle. → $F_a(x)$ = F(x) + C , mit C= – F(a)

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Ist F eine Stammfunktion einer in [a; b] stetigen Funktion f, so gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Integrationsregeln

Name	Funktion	Regel
Konstantenregel	f(x)=c ; c∈ℝ	$\int f(x)\,dx = cx + C$
Faktorregel	f(x)=c·g(x)	$\int f(x)\,dx = c \cdot \int g(x)\,dx$
Summenregel	f(x)=g(x) ±h(x)	$\int f(x)\,dx = \int g(x)\,dx \pm \int h(x)\,dx$
Substitutionsregel	$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(z)\,dz = F(z) + C$ (mit z=g(x) und dz=g´(x)dx) Dies ist die Umkehrung der **Kettenregel** der Differenzialrechnung! *Spezialfall:*	
Partielle Integration	$\int [f'(x) \cdot g(x)]\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int [f(x) \cdot g'(x)]\,dx$ Dies ist die Umkehrung der **Produktregel** der Differenzialrechnung!	

Einige grundlegende unbestimmte Integrale

$\int 0\,dx = C$	$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
$\int a\,dx = ax + C \qquad (a \in \mathbb{R})$	$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C \qquad (n \in \mathbb{R}; n \neq -1)$	$\int \tan x\,dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \ln x\,dx = x \cdot \ln x - x + C \qquad (x > 0)$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C \qquad (f(x) \neq 0)$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad (a > 0; a \neq 1)$	$\int f'(x) \cdot e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + C$

Flächeninhaltsberechnungen

<table>
<tr><th colspan="3">Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion und der x-Achse</th></tr>
<tr><td>Flächenbilanz ...</td><td colspan="2">Verläuft der Graph einer Funktion f im Intervall [a; b] unterhalb der x-Achse, so ist $\int_a^b f(x)\,dx < 0$. Dies macht bei der Interpretation des Integrals als Wirkung oder Bestand einer Größe Sinn. Wechselt der Graph zwischen positiven und negativen Werten im Intervall, so kann das bestimmte Integral als Bilanz der positiven und der negativen „Flächen" interpretiert werden; die Berechnung erfolgt wie gewohnt.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">… und Flächeninhalt</td><td colspan="2">Soll das Integral aber einen geometrischen Flächeninhalt A beschreiben (z.B. m²), so machen negative Flächen keinen Sinn!
Es gilt daher:</td></tr>
<tr><td>Falls f(x)≥0 für alle $x\in[a;b]$:
A = $\int_a^b f(x)\,dx$</td><td>Falls f(x) ≤0 für alle $x\in[a;b]$:
A= $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = -\int_a^b f(x)\,dx$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Besitzt f auf [a; b] Nullstellen (x_1, x_2,...x_n), so werden die Absolutbeträge der Teilflächen summiert:
A= $\left|\int_a^{x_1} f(x)\,dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| + \ldots + \left|\int_{x_n}^{b} f(x)\,dx\right|$</td></tr>
<tr><th colspan="3">Flächeninhalt zwischen den Graphen zweier Funktionen</th></tr>
<tr><td>f(x) ≥ g(x) für alle $x\in[a;b]$</td><td colspan="2">A= $\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$</td></tr>
<tr><td>f und g schneiden einander in [a; b] bei x_1,x_2...x_n</td><td colspan="2">A= $\left|\int_a^{x_1} [f(x)-g(x)]\,dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} [f(x)-g(x)]\,dx\right| + \ldots + \left|\int_{x_n}^{b} [f(x)-g(x)]\,dx\right|$</td></tr>
</table>

Berechnung von Rotationskörpern

<table>
<tr><th>Rotationstyp</th><th>Gleichung</th><th>Beschreibung</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Rotation um die
x-Achse</td><td>Volumen:
V= $\pi\cdot\int_a^b [f(x)]^2\,dx$</td><td rowspan="2">Der Rotationskörper entsteht durch Rotation des Flächenstücks zwischen dem Graphen von f und der x-Achse auf dem Intervall [a;b] um die x-Achse herum.</td></tr>
<tr><td>Mantelfläche:
M= $2\pi\cdot\int_a^b f(x)\cdot\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$</td></tr>
</table>

Uneigentliche Integrale

Uneigentliche Integrale mit unbeschränktem Integrationsintervall	Ist f eine in einem offenen Intervall [a; ∞[stetige Funktion mit einer Stammfunktion F, dann gilt: $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} F(b)-F(a)$ Für die Intervalle]- ∞; b] und]- ∞; ∞[gilt die Regel analog.